Devoir surveillé n° 4 - Correction

Exercice 1. Polynômes de Tchebychev (*d'après CCINP TPC 2024 et EPITA TSI 2023*)
On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes réels et, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus n.
Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul, on désigne par $\mathrm{cd}(P)$ son coefficient dominant et par $\deg(P)$ son degré.

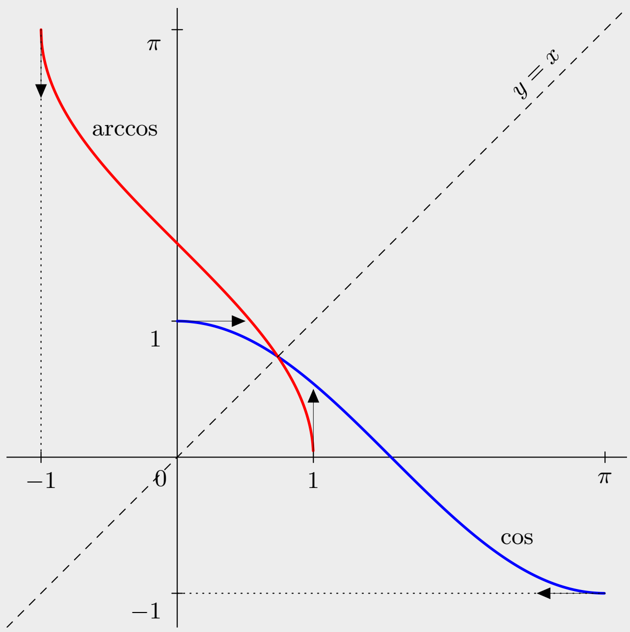
Partie A - Questions préliminaires

Q1. Donner le tableau de variation de arccos sur $[-1\,;1]$ avec les valeurs remarquables.
Tracer sur un même repère orthonormal, le graphe de cos sur $[0\,;\pi]$ et celui de arccos sur $[-1\,;1]$. *On n'oubliera pas de représenter les tangentes horizontales et verticales éventuelles.*

On sait que arccos est dérivable sur $]-1\,;1[$ et de dérivée $t \mapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}} < 0$. On obtient

t	-1	0	1
arccos	π ↘	$\boxed{\pi/2}$ ↘	0

On peut alors tracer ci-contre les deux courbes avec les tangentes horizontales et verticales.
En trait discontinu, on fait apparaître la droite d'équation $y = x$ car les deux courbes sont symétriques l'une de l'autre par rapport à cette droite (propriété des fonctions réciproques).



Q2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappeler, sans la justifier, l'expression de $\cos 2x$ en fonction de $\cos x$.

D'après le cours, $\boxed{\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1}$.
Remarque : il n'était pas demandé de justifier mais cette expression se retrouve facilement via $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ *puis en utilisant* $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ *pour exprimer le sinus en fonction du cosinus.*

Pour les deux questions suivantes, il est attendu une démonstration faisant appel aux formules de trigonométrie vues en cours, en particulier celles donnant le cosinus d'une somme ou le cosinus d'une différence.

Q3. Montrer que pour a, b réels : $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On sait que $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ donc $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. En sommant ces deux égalités, il vient $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$. Il ne reste alors plus qu'à diviser par 2 pour obtenir $\boxed{\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))}$.

Q4. Établir que pour tout x réel : $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos(2x + x) && \text{\textit{formule d'addition}} \\
&= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x && \textbf{\textit{Q2}} \text{ \textit{et} } \sin 2x = 2\sin x \cos x \\
&= \left(2\cos^2 x - 1\right)\cos x - 2\sin^2 x \cos x && \textit{dvp et } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x \\
&= \boxed{4\cos^3 x - 3\cos x}.
\end{aligned}$$

Partie B - Une famille de fonctions

Pour tout entier naturel n, on appelle f_n la fonction définie sur $[-1\,;1]$ par :

$$f_n(x) = \cos\big(n \arccos(x)\big).$$

Q5. Soit $x \in [-1\,;1]$. À l'aide des résultats de la partie A, exprimer $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ sous forme d'un polynôme.

D'abord, $f_0(x) = \cos(0) = \boxed{1}$, $f_1(x) = \cos\big(\arccos(x)\big) = \boxed{x}$. Ensuite,

$$f_2(x) = \cos\big(2\arccos(x)\big) \overset{\textbf{Q2}}{=} 2\cos^2\big(\arccos(x)\big) - 1 = \boxed{2x^2 - 1}.$$

Enfin, de manière analogue,

$$f_3(x) = \cos\big(3\arccos(x)\big) \overset{\textbf{Q4}}{=} \boxed{4x^3 - 3x}.$$

Q6. À l'aide de **Q3**, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [-1\,;1]$, $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2xf_n(x)$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1\,;1]$. On a

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) &= \cos\big((n+1)\arccos(x)\big) + \cos\big((n-1)\arccos(x)\big) \\
&= \cos\big(n\arccos(x) + \arccos(x)\big) + \cos\big(n\arccos(x) - \arccos(x)\big).
\end{aligned}$$

En appliquant alors **Q3** avec $a = n\arccos(x)$ et $b = \arccos(x)$, on obtient

$$f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2\cos\big(n\arccos(x)\big)\cos\big(\arccos(x)\big) = 2f_n(x)x = \boxed{2xf_n(x)}.$$

Q7. Soit la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$T_0 = 1,\ T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Montrer simultanément et par récurrence double que $\deg(T_n) = n$ et $\mathrm{cd}(T_n) = 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition à démontrer : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $\deg(T_n) = n$ et $\mathrm{cd}(T_n) = 2^{n-1}$ ».
Initialisation : Par définition $T_1 = X$ donc $\deg(T_1) = 1$ et $\mathrm{cd}(T_1) = 1 = 2^{1-1}$, *i.e.* $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
De plus, en utilisant la relation de récurrence, on a $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$ donc $\deg(T_2) = 2$ et $\mathrm{cd}(T_2) = 2 = 2^{2-1}$, *i.e.* $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies.
Par définition, on a $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. Or par hypothèses de récurrence, $\deg(T_n) = n$ et $\deg(T_{n+1}) = n+1$ donc $\deg(2XT_{n+1}) = n+2$. Ainsi, on obtient $\deg(T_{n+2}) = n+2$. De plus, le coefficient dominant de T_{n+2} est alors le coefficient dominant de $2XT_{n+1}$, *i.e.* $2 \times \mathrm{cd}(T_{n+1}) = 2 \times 2^{(n+1)-1} = 2^{(n+2)-1}$. Autrement dit, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \deg(T_n) = n \text{ et } \mathrm{cd}(T_n) = 2^{n-1}}$.

Q8. Prouver que pour tout entier n, la famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

D'après la question précédente et comme $\deg(T_0) = \deg(1) = 0$, on a $\deg(T_n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi la famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est échelonnée en degré et ne contient pas le polynôme nul donc $\boxed{\text{elle est libre}}$.

De plus, cette famille contient $n+1$ vecteurs et $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$ donc $\boxed{\text{il s'agit d'une base de } \mathbb{R}_n[X]}$.

Q9. Montrer que pour $x \in [-1\,;1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $T_n(x) = f_n(x)$.

Soit $x \in [-1\,;1]$.

D'après les questions **Q6** et **Q7**, les deux suites $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(T_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la même relation récurrente linéaire d'ordre 2. De plus, via **Q5**, on a $f_0(x) = 1 = T_0(x)$ et $f_1(x) = x = T_1(x)$ donc les conditions initiales sont les mêmes.

Par conséquent, $\boxed{\text{pour tous } x \in [-1\,;1] \text{ et } n \in \mathbb{N},\ T_n(x) = f_n(x)}$.

Q10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $\cos(n\theta) = 0$.

On a (faire un cercle trigo si besoin)

$$\cos(n\theta) = 0 \iff n\theta = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \iff n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \iff \boxed{\theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\ (k \in \mathbb{Z})}.$$

Q11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $T_n(\cos\theta) = 0$ si et seulement si $\cos(n\theta) = 0$. En déduire l'ensemble des racines de T_n.

Tout d'abord,

$$T_n(\cos\theta) = 0 \overset{\textbf{Q9}}{\iff} f_n(\cos\theta) = 0 \overset{\text{déf. } f_n}{\iff} \cos(n \arccos(\cos\theta)) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0.$$

D'après la question précédente, cela signifie que $\cos\theta$ est racine de T_n si et seulement si $\theta = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit les racines de T_n sont de la forme $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Or la fonction cos étant 2π-périodique, on peut limiter à $k \in [\![0\,;2n-1]\!]$ puis cos étant paire, on limite à $\boxed{k \in [\![0\,;n-1]\!]}$. On a ainsi obtenu $\boxed{n \text{ racines distinctes}}$. Comme on sait par **Q7** que T_n est de degré n, on a donc toutes les racines.

Partie C - Un produit scalaire

Q12. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to1^-}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$.

En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge.

- On a $t^k \underset{t\to1^-}{\longrightarrow} 1$ et $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{(1+t)(1-t)} \underset{t\to1^-}{\sim} \sqrt{2(1-t)}$ d'où $\boxed{\dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to1^-}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}}$.

Remarque : comme le résultat est donné, on aurait pu aussi faire le quotient et vérifier qu'il tend vers 1.

- La fonction $t \mapsto \dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0\,;1[$. D'après le point précédent, il suffit d'étudier la convergence de l'intégrale $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ en 1. On connaît une primitive ! Soit $X \in [0\,;1[$. On a

$$\int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} = \Big[-2\sqrt{1-t}\Big]_0^X = -2\sqrt{1-X} + 2 \underset{X\to1^-}{\longrightarrow} 2 \in \mathbb{R}.$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ est convergente et, par équivalence de fonctions positives, $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$.

Remarque : Pour la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$*, on aurait aussi pu procéder au changement de variable* $x = 1-t$ *et ainsi se ramener à une intégrale de Riemann en* 0.

Q13. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. On pourra distinguer deux cas suivant la parité de k.

Tout d'abord $f_k \colon t \mapsto \dfrac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1\,;1[$. On doit donc étudier la convergence de $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f_k(t)\,\mathrm{d}t$ et de $I_2 = \displaystyle\int_{-1}^0 f_k(t)\,\mathrm{d}t$. Celle de I_1 est assurée par la question précédente.
Cas k pair : la fonction f_k est paire donc $I_2 = I_1$ est également convergente (et l'intégrale étudiée vaut $2I_1$).
Cas k impair : la fonction f_k est impaire donc $I_2 = -I_1$ est également convergente (et l'intégrale étudiée vaut 0).

Dans les deux cas, on a montré que $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}}$.

Pour tout couple (P,Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$, on pose $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Q14. Déduire de la question précédente que l'application φ est bien définie.

Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$. Le produit PQ est également un polynôme et on peut écrire $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t)Q(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k t^k$ où $d \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}$.

D'après la question précédente, on sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente donc par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est aussi convergente, *i.e.* $\boxed{\varphi \text{ est bien définie}}$.

Q15. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

D'après la question précédente, φ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Symétrie : Juste à écrire.
Linéarité à gauche : Provient de la linéarité de l'intégrale.
Linéarité à droite : Découle de la symétrie et de la linéarité à gauche.
Positivité : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $\varphi(P,P) = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ en tant qu'intégrale d'une fonction positive.
Caractère défini : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(P,P) = 0$. D'après le calcul précédent, cela signifie que $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est ainsi continue, positive et d'intégrale nulle donc $\forall t \in\,]-1\,;1[$, $\dfrac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} = 0$, *i.e.* $P(t)^2 = 0$, d'où $P(t) = 0$. Ainsi le polynôme P admet une infinité de racines (tous les réels de $]-1\,;1[$) donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.
Finalement φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive donc $\boxed{\text{un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X]}$.

Partie D - Une base orthogonale

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.
L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est muni du produit scalaire défini dans la partie C que l'on note désormais $\langle P \mid Q\rangle$.
La norme associée est notée $\|\cdot\|$.

Q16. Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^\pi \cos(px)\cos(qx)\,\mathrm{d}x$.

a) Démontrer que si $p \neq q$, alors $I_{p,q} = 0$.

Soient $p \neq q$ deux entier naturels.

$$\begin{aligned}
I_{p,q} &\overset{\textbf{Q3}}{=} \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(px+qx) + \cos(px-qx)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{p+q\neq 0 \text{ et } p-q\neq 0}{=} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\big((p+q)x\big)}{p+q} + \frac{\sin\big((p-q)x\big)}{p-q}\right]_0^\pi \\
&\overset{\sin(kx)=0 \text{ pour tout entier } k}{=} \boxed{0}.
\end{aligned}$$

b) Calculer $I_{0,0}$.

Directement $I_{0,0} = \displaystyle\int_0^\pi 1 \times 1\,\mathrm{d}x = \Big[x\Big]_0^\pi = \boxed{\pi}$.

c) Calculer $I_{p,p}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
I_{p,p} &= \int_0^\pi \cos^2(px)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\textbf{Q2}}{=} \int_0^\pi \frac{1+\cos(2px)}{2}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{p\neq 0}{=} \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin(2px)}{2p}\right]_0^\pi \\
&= \boxed{\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

Q17. À l'aide du changement de variable $x = \arccos(t)$ et de **Q16**, montrer que la famille $(T_0,\dots,T_n)$ définie dans la partie B est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

D'après **Q8**, on sait déjà que la famille $(T_0,\dots,T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Il reste à montrer qu'elle est orthogonale.
Soient $p \neq q$ deux éléments de $[\![0\,;n]\!]$.

$$\langle T_p \mid T_q\rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_p(t)T_q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \overset{\textbf{Q9}}{=} \int_{-1}^1 \frac{f_p(t)f_q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 \frac{\cos\big(p\arccos(t)\big)\cos\big(q\arccos(t)\big)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

On pose alors $x = \arccos(t) \iff t = \cos x$ donc $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$. Alors

$$\langle T_p \mid T_q\rangle = \int_\pi^0 \frac{\cos(px)\cos(qx)}{\sqrt{1-\cos^2 x}}(-\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\cos(px)\cos(qx)}{\cancel{\sin x}}\cancel{\sin x}\,\mathrm{d}x = I_{p,q} \overset{\textbf{Q16}}{=} 0.$$

La famille $\boxed{(T_0,\dots,T_n) \text{ est donc une base orthogonale de } \mathbb{R}[X]}$.
Remarque : On peut aussi partir de $I_{p,q} = 0$ et poser $x = \arccos(t)$.

Q18. Déterminer la norme de T_p pour $p \in \mathbb{N}$. La base $(T_0,\dots,T_n)$ est-elle orthonormale ?

- Soit $p \in \mathbb{N}$. Par un calcul analogue à celui de la question précédente, on a

$$\|T_p\|^2 = \langle T_p \mid T_p \rangle = I_{p,p}.$$

Via **Q16** b) et c), on obtient $\boxed{\|T_0\| = \sqrt{\pi} \text{ et pour } p \in \mathbb{N}^*,\ \|T_p\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$.

- Les éléments n'étant pas unitaires, $\boxed{\text{la base } (T_0, \ldots, T_n) \text{ n'est pas orthonormale}}$.

Q19. Justifier que le polynôme T_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

D'après **Q17**, T_n est orthogonal à chaque élément de la famille $(T_0, \ldots, T_{n-1})$. Or, d'après **Q8**, cette famille est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi $\boxed{\text{le polynôme } T_n \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

Q20. En utilisant un résultat du cours, donner une expression de X^n en fonctions des polynômes de la base orthogonale $(T_0, \ldots, T_n)$.

De la base orthogonale $(T_0, \ldots, T_n)$, on obtient la base orthonormale $\left(\frac{T_0}{\|T_0\|}, \ldots, \frac{T_n}{\|T_n\|}\right)$. Ainsi, d'après le cours, on sait que

$$X^n = \sum_{i=0}^{n} \left\langle X^n \mid \frac{T_i}{\|T_i\|} \right\rangle \frac{T_i}{\|T_i\|} = \boxed{\sum_{i=0}^{n} \frac{\langle X^n \mid T_i \rangle}{\|T_i\|^2} T_i},$$

où pour la dernière égalité on a utilisé la linéarité à droite du produit scalaire.

Q21. À l'aide du calcul de $\langle T_n - 2^{n-1} X^n \mid T_n \rangle$, montrer enfin que $\langle X^n \mid T_n \rangle = \dfrac{\pi}{2^n}$.

- D'après **Q7**, T_n est de degré n et son coefficient dominant vaut 2^{n-1} donc $\deg(T_n - 2^{n-1}X^n) \leqslant n-1$, *i.e.* $T_n - 2^{n-1}X^n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi, d'après **Q19**, $\boxed{\langle T_n - 2^{n-1}X^n \mid T_n \rangle = 0}$.
- Par linéarité à gauche du produit scalaire, l'égalité précédente devient $\langle T_n \mid T_n \rangle - 2^{n-1} \langle X^n \mid T_n \rangle = 0$, d'où finalement

$$\langle X^n \mid T_n \rangle = \frac{\langle T_n \mid T_n \rangle}{2^{n-1}} = \frac{\|T_n\|^2}{2^{n-1}} \overset{\textbf{Q18}}{=} \boxed{\frac{\pi}{2^n}}.$$

Exercice 2. Variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,1\}$ (*d'après CCINP 2021*)

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur le même espace probabilisé (Ω, P). Pour X une variable aléatoire sur Ω, on note $X(\Omega)$ l'ensemble de ses valeurs.
On dit qu'une variable aléatoire X sur (Ω, P) suit une loi de Rademacher lorsque :

$$X(\Omega)=\{-1,1\}, \qquad P(X=-1)=\frac{1}{2}, \qquad P(X=1)=\frac{1}{2}.$$

Partie I - Marche aléatoire sur un carré

Dans cette partie, le plan usuel $\mathbb{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé direct.

I.1 - Rotations du plan

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On admet que la matrice de la rotation dans le plan $\mathbb{R}^2$ d'angle θ est $R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.
On note f_θ l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ canoniquement associée à cette matrice de rotation.

Q22. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, calculer $f_\theta(x,y)$.

D'après la matrice donnée dans l'énoncé :

$$f_\theta(x,y)=R(\theta)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}x\cos\theta-y\sin\theta\\ x\sin\theta+y\cos\theta\end{pmatrix}}.$$

À partir de cette question, on identifie le plan complexe $\mathbb{C}$ au plan usuel $\mathbb{R}^2$. Ainsi, à chaque point (x,y) dans $\mathbb{R}^2$ est associé une unique affixe $x+\mathrm{i}y$ dans $\mathbb{C}$.

Q23. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, démontrer que l'affixe correspondante à $f_\theta(x,y)$ s'écrit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(x+\mathrm{i}y)$.

D'après la question précédente, l'affixe de $f_\theta(x,y)$ est

$$(x\cos\theta-y\sin\theta)+\mathrm{i}(x\sin\theta+y\cos\theta)=x(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)+\mathrm{i}y(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=\boxed{(x+\mathrm{i}y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}.$$

Pour la suite de cette partie, on admet que la rotation d'angle θ et ayant pour centre l'origine est représentée par l'application complexe $r_\theta\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définie par :

$$r_\theta(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,z \text{ où } z\in\mathbb{C}.$$

I.2 - Racines n-ièmes de l'unité

Dans cette sous-partie, n désigne un entier naturel non nul. On rappelle qu'une racine n-ième de l'unité est un nombre complexe z vérifiant $z^n=1$. On note, pour $k\in[\![0\,;n-1]\!]$, $\omega_k=\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{n}\mathrm{i}}$.

Q24. Montrer que $\omega_0,\dots,\omega_{n-1}$ sont précisément les racines n-ièmes de l'unité.

Soit $k\in[\![0\,;n-1]\!]$. On a $(\omega_k)^n=\left(\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{n}\mathrm{i}}\right)^n=\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}}=1$, *i.e.* ω_k est une racine n-ième de l'unité.
Autrement dit, $\omega_0,\dots,\omega_{n-1}$ sont n solutions distinctes de l'équation $z^n-1=0$.
Or, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, le polynôme z^n-1 admet au maximum n racines distinctes dans $\mathbb{C}$.
Ainsi $\boxed{\omega_0,\dots,\omega_{n-1} \text{ sont exactement les racines } n\text{-ièmes de l'unité}}$.

Q25. Montrer que, pour tout $k\in[\![0\,;n-1]\!]$, on a : $r_{2\pi/n}(\omega_k)=\omega_{k+1}$.

Soit $k\in[\![0\,;n-1]\!]$. On a

$$r_{2\pi/n}(\omega_k)\overset{\text{Q23}}{=}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\,\omega_k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\,\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{n}\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\frac{2k+2}{n}\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\frac{2(k+1)}{n}\pi\mathrm{i}}=\boxed{\omega_{k+1}}.$$

Q26. Dans le cas où $n = 4$, donner la forme algébrique de ω_0, ω_1, ω_2 et ω_3.

On a $\boxed{\omega_0 = \mathrm{e}^{\frac{0\pi}{4}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^0 = 1,\ \omega_1 = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{4}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i},\ \omega_2 = \mathrm{e}^{\frac{4\pi}{4}\mathrm{i}} = -1 \text{ et } \omega_3 = \mathrm{e}^{\frac{6\pi}{4}\mathrm{i}} = -\mathrm{i}}$.

I.3 - Marche aléatoire sur un carré

Dans cette sous-partie, le plan est assimilé à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. On s'intéresse à une boussole centrée en 0 dont l'aiguille peut indiquer l'une des quatre directions :

Est (d'affixe 1), Nord (d'affixe i), Ouest (d'affixe -1) et Sud (d'affixe $-$i).

On suppose que lorsque l'aiguille se trouve en l'un des quatre points précédents à une étape, elle se déplace d'un point à l'étape d'après avec la probabilité $\frac{1}{2}$ que ce soit dans le sens trigonométrique ou dans le sens inverse. D'une étape sur l'autre, elle ne peut donc pas rester sur place.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on étudie le déplacement de l'aiguille de l'étape n à l'étape $n+1$ et on note A_n la variable aléatoire qui indique l'affixe de l'aiguille de la boussole à l'étape n. Ainsi A_n prend ses valeurs dans $\{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$.
On admet que les résultats du cours pour les variables aléatoires à valeurs réelles le sont aussi pour les variables aléatoires à valeurs complexes. On pourra donc les utiliser sur les variables A_n.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note aussi D_n la variable aléatoire qui vaut $+1$ si la boussole tourne dans le sens trigonométrique entre l'étape n et l'étape $n+1$, et -1 dans le sens inverse. De ce fait D_n suit une loi de Rademacher.

Q27. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $A_{n+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}D_n} A_n$.

On obtient la valeur de A_{n+1} à partir de celle de A_n :

- soit par une rotation dans le sens trigonométrique et dans ce cas $A_{n+1} \overset{\textbf{Q23}}{=} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} A_n$;
- soit par une rotation dans le sens inverse et dans ce cas $A_{n+1} \overset{\textbf{Q23}}{=} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{2}} A_n$.

Or la variable aléatoire D_n prend la valeur 1 si la rotation a lieu dans le sens trigonométrique et -1 dans le sens inverse d'où $\boxed{A_{n+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}D_n} A_n}$.

Q28. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la variable D_n et le fait que $\{(A_n = 1), (A_n = \mathrm{i}), (A_n = -1), (A_n = -\mathrm{i})\}$ est un système complet d'événements de Ω, justifier que :

$$P(A_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(A_n = \mathrm{i}) + \frac{1}{2}P(A_n = -\mathrm{i}).$$

D'après la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements donné par l'énoncé, on a

$$P(A_{n+1} = 1) = P([A_{n+1} = 1] \cap [A_n = 1]) + P([A_{n+1} = 1] \cap [A_n = \mathrm{i}]) + P([A_{n+1} = 1] \cap [A_n = -1]) + P([A_{n+1} = 1] \cap [A_n = -\mathrm{i}]).$$

Or l'événement $A_{n+1} = 1$ est incompatible avec les événements $A_n = 1$ et $A_n = -1$ puisque l'aiguille tourne d'exactement un quart de tour à chaque étape. Il reste donc

$$\begin{aligned} P(A_{n+1} = 1) &= P([A_{n+1} = 1] \cap [A_n = \mathrm{i}]) + P([A_{n+1} = 1] \cap [A_n = -\mathrm{i}]) \\ &= P(A_n = \mathrm{i})P(A_{n+1} = 1 \mid A_n = \mathrm{i}) + P(A_n = -\mathrm{i})P(A_{n+1} = 1 \mid A_n = -\mathrm{i}) \\ &= P(A_n = \mathrm{i})P(D_n = -1) + P(A_n = -\mathrm{i})P(D_n = 1) \\ &= \boxed{\frac{1}{2}P(A_n = \mathrm{i}) + \frac{1}{2}P(A_n = -\mathrm{i})}. \end{aligned}$$

Q29. Soit $n \in \mathbb{N}$. Sans justifier, exprimer avec des formules analogues, $P(A_{n+1} = \mathrm{i})$, $P(A_{n+1} = -1)$ et $P(A_{n+1} = -\mathrm{i})$.

De manière analogue :

$$\begin{aligned}
P(A_{n+1}=\mathrm{i}) &= \frac{1}{2}P(A_n=1)+\frac{1}{2}P(A_n=-1)\\
P(A_{n+1}=-1) &= \frac{1}{2}P(A_n=\mathrm{i})+\frac{1}{2}P(A_n=-\mathrm{i})\\
P(A_{n+1}=-\mathrm{i}) &= \frac{1}{2}P(A_n=1)+\frac{1}{2}P(A_n=-1)
\end{aligned}$$

On note la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Q30. Sans calcul, justifier que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

La matrice M est symétrique et réelle donc, d'après le théorème spectral, $\boxed{M \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R}}$.

Q31. La matrice M est-elle inversible ?

Deux colonnes de la matrice M sont identiques donc $\boxed{M \text{ n'est pas inversible}}$.

Q32. Montrer que -1 est valeur propre de M.

Méthode 1 : On a

$$\chi_M(-1) = \det(-\mathrm{I}_4 - M) = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

où l'on a d'abord sommé toutes les colonnes dans la première puis soustrait la première ligne aux autres. En sommant les deuxième et quatrième lignes, on obtient une ligne identique à la troisième et donc un déterminant nul. Autrement dit $\chi_M(-1) = 0$, *i.e.* $\boxed{-1 \text{ est valeur propre de } M}$.

Méthode 2 : on s'inspire de la question suivante en montrant que le vecteur non nul $u = (1, -1, 1, -1)$ vérifie $Mu = -u$, *i.e.* -1 est valeur propre de M (et u est un vecteur propre associé).

Q33. Montrer que le vecteur $(1, 1, 1, 1)$ est vecteur propre de M et préciser la valeur propre associée.

Notons v le vecteur colonne dont toutes les coordonnées valent 1. Par produit matriciel, on a directement $Mv = v$, *i.e.* $\boxed{v \text{ est vecteur propre de } M \text{ associé à la valeur propre } 1}$.

Q34. Déterminer une base de l'image de M puis retrouver que M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ grâce aux dimensions des sous-espaces propres.

- Par définition, l'image de M est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les colonnes de M, *i.e.*

$$\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

Ces deux vecteurs étant clairement non colinéaires, $\boxed{\text{ils forment une base de } \mathrm{Im}(M)}$.

- En particulier, $\mathrm{Im}(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2. Or, d'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\mathrm{Ker}(M)) + \dim(\mathrm{Im}(M))$ d'où $\dim(\mathrm{Ker}(M)) = 2$, ce qui signifie que 0 est valeur propre de M de multiplicité au moins 2.

Ainsi, d'après les deux questions précédentes et ci-dessus, on a obtenu que -1, 1 et 0 sont valeurs propres de M avec 0 de multiplicité au moins 2. Comme $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4, on a toutes les valeurs propres et pour chacune la multiplicité est égale à la dimension de l'espace propre, d'où $\boxed{M \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R}}$.

Q35. Soit la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n = 1) \\ P(A_n = \mathrm{i}) \\ P(A_n = -1) \\ P(A_n = -\mathrm{i}) \end{pmatrix}$. On suppose qu'à l'étape 0, l'aiguille indique l'Est, c'est-à-dire $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Expliquer la démarche, sans mener les calculs, pour obtenir une expression en fonction de $n \in \mathbb{N}$ des probabilités $P(A_n = 1)$, $P(A_n = \mathrm{i})$, $P(A_n = -1)$ et $P(A_n = -\mathrm{i})$.

D'après les questions **Q28** et **Q29**, on a $U_{n+1} = MU_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par récurrence, on obtiendrait $\boxed{U_n = M^n U_0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.
Pour calculer M^n, on commencerait par diagonaliser M, *i.e.* déterminer des matrices D diagonale et P inversible telles que $M = PDP^{-1}$. En pratique, D contient sur sa diagonale les valeurs propres (0 deux fois, 1 et -1) et les colonnes de P sont des vecteurs propres correspondant (par exemple celui déterminé en **Q33** pour 1).

On a alors $\boxed{M^n = PD^nP^{-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$ et le calcul de D^n est aisé : comme D est diagonale, il suffit d'élever les coefficients diagonaux à la puissance n.

Finalement, $\boxed{U_n = PD^nP^{-1}U_0}$ et un simple produit matriciel, après inversion de P, permettrait d'obtenir les expressions recherchées.

Partie II - Orthonormalité des lois de Rademacher

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 - Un produit scalaire

On note $V_f(\Omega)$ l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes sur Ω admettant un nombre fini de valeurs :

$$V_f(\Omega) = \{X : \Omega \to \mathbb{R},\ X(\Omega) \text{ est fini}\}.$$

Q36. Montrer que si X suit une loi de Rademacher, alors $X \in V_f(\Omega)$ et montrer que $E(X) = 0$.

- Par définition, si X suit une loi de Rademacher alors $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ et en particulier $X(\Omega)$ est fini, *i.e.* $\boxed{X \in V_f(\Omega)}$.
- De plus, $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = \sum_{x \in \{-1,1\}} xP(X = x) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \boxed{0}$.

Q37. Montrer que $V_f(\Omega)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

- D'après la question précédente $V_f(\Omega)$ est non vide[1] puisqu'une variable aléatoire suivant une loi de Rademacher appartient à $V_f(\Omega)$.
- Soient X_1 et X_2 deux éléments de $V_f(\Omega)$, λ et μ deux réels. Comme X_1 et X_2 prennent un nombre fini de valeurs, il en est de même pour la variable aléatoire $\lambda X_1 + \mu X_2$, *i.e.* $\lambda X_1 + \mu X_2 \in V_f(\Omega)$.

On a ainsi montré que $\boxed{V_f(\Omega) \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$.

1. On aurait aussi pu montrer qu'une variable aléatoire suivante une loi certaine égale à 0 est dans $V_f(\Omega)$.

On définit l'application Φ sur $V_f(\Omega) \times V_f(\Omega)$ par :

$$\Phi(X, Y) = E(XY)$$

où E désigne l'espérance et X et Y sont deux éléments de $V_f(\Omega)$.

Q38. Montrer que l'application Φ est un produit scalaire sur $V_f(\Omega)$.

• *Symétrie* : Soient X, $Y \in V_f(\Omega)$. On a $\Phi(Y, X) = E(YX) = E(XY) = \Phi(X, Y)$.
• *Linéarité à gauche* : Soient X_1, X_2, $Y \in V_f(\Omega)$ et λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda X_1 + \mu X_2, Y) &= E\big((\lambda X_1 + \mu X_2)Y\big) && \textit{définition } \Phi \\ &= E(\lambda X_1 Y + \mu X_2 Y) \\ &= \lambda E(X_1 Y) + \mu(X_2 Y) && \textit{linéarité espérance} \\ &= \lambda \Phi(X_1, Y) + \mu \Phi(X_2, Y).\end{aligned}$$

• *Linéarité à droite* : Découle de la symétrie et de la linéarité à gauche.
• *Positivité* : Soit $X \in V_f(\Omega)$. D'après le théorème de transfert, on a

$$\Phi(X, X) = E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x) \geqslant 0,$$

comme somme de termes positifs ou nuls (produits d'un carré et d'une probabilité).
• *Caractère défini* : Soit $X \in V_f(\Omega)$ telle que $\Phi(X, X) = 0$.
D'après le calcul précédent, cela équivaut à $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x) = 0$. Comme chaque terme de la somme est positif, on a nécessairement $x^2 P(X = x) = 0$ pour tout $x \in X(\Omega)$. Ainsi on a soit $P(X = x) = 0$, *i.e.* l'événement $X = x$ est impossible, soit $x = 0$. Autrement dit, X ne peut prendre que la valeur 0, c'est donc la variable aléatoire nulle.
On a ainsi montré que $\boxed{\Phi \text{ est un produit scalaire sur } V_f(\Omega)}$.

II.2 - Orthonormalité et projection

On considère $X_1, \dots, X_n$ une suite de n variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Rademacher.
On **admet** que, si i et j sont dans $[\![1\,;n]\!]$ avec $i \neq j$, on a $E(X_i X_j) = 0$.

Q39. Montrer que $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille orthonormale dans $V_f(\Omega)$ pour le produit scalaire Φ.

D'une part, d'après le résultat admis dans l'énoncé, on a $\Phi(X_i, X_j) = E(X_i X_j) = 0$ dès que $i \neq j$ donc la famille est orthogonale.
D'autre part, pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, on a, via le théorème de transfert,

$$\|X_i\|^2 = \Phi(X_i, X_i) = E(X_i^2) = \sum_{x \in X_i(\Omega)} x^2 P(X_i = x) = \sum_{x \in \{-1,1\}} x^2 P(X_i = x) = (-1)^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{2} = 1,$$

c'est-à-dire que X_i est de norme 1.
On a ainsi montré que $\boxed{\text{la famille } (X_1, \dots, X_n) \text{ est orthonormée pour } \Phi}$.

On garde dans cette dernière sous-partie les notations introduites ci-dessus. On note F le sous-espace vectoriel de $V_f(\Omega)$ engendré par $X_1, \dots, X_n$.

Q40. Déterminer la dimension de F.

D'après la question précédente, la famille $(X_1, \dots, X_n)$ est orthonormée donc en particulier orthogonale et constituée de vecteurs non nuls. Il s'agit ainsi d'une famille libre donc d'une base de F et en particulier $\boxed{\dim(F) = n}$.

Q41. Soit $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i + 1}{2}$. Déterminer le projeté orthogonal de X sur F.

Comme d'après **Q39** la famille $(X_1, \dots, X_n)$ est une base orthonormée de F, on a

$$p_F(X) = \sum_{j=1}^{n} \Phi(X, X_j) X_j.$$

Or, pour $j \in [\![1\,;n]\!]$, grâce à la linéarité de l'espérance, on a :

$$\Phi(X, X_j) = E\left(X_j \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i + 1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} E(X_j X_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} E(X_j).$$

Or, d'après le résultat admis, $E(X_j X_i) = 0$ dès que $i \neq j$ et, d'après **Q36**, $E(X_j) = 0$. Il reste donc $\Phi(X, X_j) = \dfrac{1}{2} E(X_i^2) = \dfrac{1}{2}$ d'après le calcul effectué dans **Q39**.

Finalement, on a obtenu $\boxed{p_F(X) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} X_j}$.

Q42. En déduire la distance de X à F.

D'après le cours, on sait que $d(X, F) = \|X - p_F(X)\|$. Or, d'après la question précédente

$$X - p_F(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i + 1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}.$$

Autrement dit, $Y = X - p_F(X)$ est une variable aléatoire suivant une loi certaine égale à $\frac{n}{2}$.
Enfin,

$$d(X, F) = \|X - p_F(X)\| = \|Y\| = \sqrt{\Phi(Y, Y)} = \sqrt{E(Y^2)} = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 \times 1} = \boxed{\frac{n}{2}}.$$